



TITLE:

PTIME degrees の decidability problems について(数理論理学とその応用)

AUTHOR(S):

津田, 照子

CITATION:

津田, 照子. PTIME degrees の decidability problems について(数理論理学とその応用). 数理解析研究所講究録 1993, 818: 141-150

ISSUE DATE:

1993-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83127>

RIGHT:

PTIME degrees の decidability problems について

神戸大自然科学 津田照子 (Teruko Tsuda)

1 (Honest) p-time degrees

$\Sigma = \{0, 1\}$, Σ^* を Σ 上の有限列の集合とし, その要素を x, y, z, \dots で, 部分集合を A, B, \dots 等に表示する. $|x|$ は x の長さ, \langle, \rangle は invertible, p-time, pairing function で $|x|, |y| \leq |\langle x, y \rangle|$ を満たすものとする.

OTM (oracle Turing machine) が polynomially honest であるとは, polynomial p が存在して, 任意の input x と oracle query y に対して $|x| \leq p(|y|)$ であるときに言う.

A が B に p-T [hp-T] reducible, $A \leq_T^p B$ [$A \leq_T^{hp} B$] と書く, であるとは, A を accept するような p-time bounded (即ち, 任意の input x と oracle query y に対して $|y| \leq p(|x|)$ が成り立つ) [且つ, polynomially honest] で, B を oracle とする deterministic Turing machine が存在することである.

また, A が B に p-m [hp-m] reducible, $A \leq_m^p B$ [$A \leq_m^{hp} B$] と書く, であるとは, p-time computable [且つ, p-honest 即ち, $|x| \leq p(|f(x)|)$] function $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ [$f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \cup \{+, -\}$] が存在して $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ [$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \cup \{+\}$] なることである.

これらの reducibilities 間の関係は, 次のようである.

$$\begin{array}{ccc}
A \leq_m^{hp} B & \implies & A \leq_T^{hp} B \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
A \leq_m^p B & \implies & A \leq_T^p B
\end{array}$$

各 reducibility による equivalent を $A \equiv_T^p B \Leftrightarrow A \leq_T^p B \ \& \ B \leq_T^p A$ 等とし, A の equivalent class を $\deg_T^p(A)$ 等と表わす. 以後, これらの degrees を単に a, b, \dots 等で表わす.

Recursive join を $A \oplus B = \{0x : x \in A\} \cup \{1x : x \in B\}$ で定義すると, 各 reducibility について $\deg_r(A \oplus B) = \deg_r(A) \vee \deg_r(B)$ となり, base set R に対して $\langle S, \leq_r \rangle$; $S = \{\deg_r(A) : A \in R\}$ は upper semi-lattice である.

$\langle S, \leq_r \rangle$ の elementary theory を $\text{Th}(\langle S, \leq_r \rangle)$, その Π_n -theory (Π_n -sentences) を $\Pi_n\text{-Th}(\langle S, \leq_r \rangle)$ とする.

Base sets は, 次のようなものを考えている.

$$\text{Base sets : } \begin{cases} REC & (\text{recursive sets}) \\ R & (\text{all sets}) \\ LOW & (\text{low sets}) \\ I & (\subseteq LOW) \end{cases}$$

ここで, A が low set であるとは, $A' \equiv_T \emptyset'$ なることである. また, I は, 次の条件を充たす. ([4])

- (1) $A \in I$ で, B が recursive in A ならば $B \in I$
- (2) $A, B \in I$ ならば $A \oplus B \in I$

上述の theories の decidability に関して得られている結果は, 以下の様である.

$\text{Th}(\langle REC, \leq_T^p \rangle)$ は undecidable である. ([6])

$\text{Th}(\langle REC, \leq_T^{hp} \rangle)$ は undecidable である. ([2])

$\Pi_2\text{-Th}(\langle REC, \leq_T^p \rangle)$ は decidable である. ([7])

$\Pi_2\text{-Th}(\langle I, \leq_T^{hp} \rangle)$ は decidable である. ([4])^(†)

$\text{Th}(\langle \text{REC}, \leq_m^p \rangle)$ は undecidable である. ([1])

$\text{Th}(\langle \text{REC}, \leq_m^{hp} \rangle)$ は undecidable である. ([2])

$\text{Th}(\langle R, \leq_m^{hp} \rangle)$ は undecidable である. ([5])

2 Construction

(†) で用いた方法で, REC 上の p-time degrees の structures の基本的なものは $\langle \text{LOW}, \leq_T^{hp} \rangle$ においても成立する.

例えば,

Strong minimal pair theorem ([3])

Splitting theorem

ここでは, splitting theorem の証明で, その構成方法を示す.

Splitting Theorem:

$$\forall b, c \text{ s.t. } c < b \exists a_0, a_1 [b = a_0 \vee a_1 \ \& \ c < a_0, a_1 < b \ \& \ a_0 | a_1]$$

Proof

$\{(\Phi_e, p_e)\}$ を p-honest OTMs の recursive enumeration, $B \in b, C \in c$ とする.

$A_0 \in a_0, A_1 \in a_1$ を 次のように構成する.

Requirements を,

$$R_{2e} : A_0 \neq \Phi_e(C)$$

$$R_{2e+1} : A_1 \neq \Phi_e(C)$$

とする. priority は R の suffix の順とする. 途中決定する switching points を $l_0, l_1, \dots, l_N, \dots$, $D_k = \{x : l_k \leq |x| < l_{k+1}\}$ とし, $t(N)$ を D_N で attack された requirement の suffix とする.

A_0, A_1 を,

$$A_0(x) = \begin{cases} B(x) & \text{if } x \in D_N \text{ \& } t(N) = 2e \\ C(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A_1(x) = \begin{cases} B(x) & \text{if } x \in D_N \text{ \& } t(N) = 2e + 1 \\ C(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する.

この定義と後の construction で, R_{2e}, R_{2e+1} を充たすようにすることにより, 同時にそれぞれ $B \neq \Phi_e(A_1), B \neq \Phi_e(A_0)$ も充たされる.

候補となる witnesses の sets として, Finite sets の recursive sequences, $\{V_{e,s}\}, \{\widehat{V}_{e,s}\}$, を構成し, $V_e = \cup_s V_{e,s}, \widehat{V}_e = \cup_s \widehat{V}_{e,s}$ とすると, これらは r.e. であるから index function で $V_e = W_{\theta(e)}, \widehat{V}_e = W_{\hat{\theta}(e)}$ と表わせる.

$$V_e \subseteq [\langle x, n \rangle : \exists s [B_s(x) = 1 \text{ \& } \Phi_e(\sigma_n, x) = 0 \text{ \& } \sigma_n = C_s \upharpoonright p_e^x]]$$

$$\widehat{V}_e \subseteq [\langle x, n \rangle : \exists s [B_s(x) = 0 \text{ \& } \Phi_e(\sigma_n, x) = 1 \text{ \& } \sigma_n = C_s \upharpoonright p_e^x]]$$

となるように構成される. ここで, $p_e^x = \{y \in \Sigma^* : |x| \leq p_e(|y|) \text{ \& } |y| \leq p_e(|x|)\}$ で, $\{\sigma_n\}$ は $\text{dom}(\sigma) = p_e^x, \text{rng}(\sigma) \subseteq \{0, 1\}$ なる形の finite functions の recursive enumeration とする.

また, witnesses を certify するために, 次の Δ_2^0 sets を用いる.

$$H = \{e' : \exists \langle x, n \rangle \in W_{e'} [x \in B \text{ \& } \sigma_n = C \upharpoonright p_e^x \text{ for some } e]\}$$

$$\widehat{H} = \{e' : \exists \langle x, n \rangle \in W_{e'} [x \notin B \text{ \& } \sigma_n = C \upharpoonright p_e^x \text{ for some } e]\}$$

Limit lemma から, recursive functions h, \hat{h} が存在して,

$$H(x) = \lim_s h(x, s), \widehat{H}(x) = \lim_s \hat{h}(x, s)$$

同様に, B, C についても, $B(x) = \lim_s B_s(x), C(x) = \lim_s C_s(x)$ とする.

Construction:

補助関数 $l(s), r(s)$ はそれぞれ, stage s での対象となっている区間 D と requirement R の suffix を表わす. また, $LIST$ を certify されていない requirements のリスト, c を global counter とする.

Stage 0

$c = 0$, $l(0) = l_0 = 0$, $r(0) = 0$, $LIST = \{\text{all requirements}\}$, $V_{e,0} = \widehat{V}_{e,0} = \emptyset$ とし, (stage) 0 を testing phase とする.

Stage ($s + 1$)

$l(s) = l_N$ とし, $R_{t(N)}$ を $LIST$ の中で highest priority を持つ requirement とする.

Case 1 s が testing phase である場合.

Case 1.1 $t(N) = 2e$ である場合.

Case 1.1.1 $p_e(l_N) \leq |x| < s + 1$ なる x で次の条件のいずれかを満たすものが存在する場合.

$$(1) B_{s+1}(x) = 1 \ \& \ \Phi_e(C_{s+1}, x) = 0$$

$$(2) B_{s+1}(x) = 0 \ \& \ \Phi_e(C_{s+1}, x) = 1$$

そのような最小の x を取る. (1) を満たすならば,

$$V_{2e,s+1} = V_{2e,s} \cup \{\langle x, n \rangle\}$$

(2) を満たすならば,

$$\widehat{V}_{2e,s+1} = \widehat{V}_{2e,s} \cup \{\langle x, n \rangle\}$$

とする. ここで, $\sigma_n = C_{s+1} \upharpoonright p_e^x$.

Case 1.1.1.1 次のいずれかを満たす場合.

(i) $h(\theta(2e), s + 1) = 1$ and

$$(\exists \langle x, n \rangle \in V_{2e,s+1}) [B_{s+1}(x) = 1 \ \& \ \sigma_n = C_{s+1} \upharpoonright p_e^x]$$

(ii) $\hat{h}(\hat{\theta}(2e), s + 1) = 1$ and

$$(\exists \langle x, n \rangle \in \widehat{V}_{2e,s+1}) [B_{s+1}(x) = 0 \ \& \ \sigma_n = C_{s+1} \upharpoonright p_e^x]$$

このとき, R_{2e} は certify されたと言い, $N := N + 1$, $l_N =$ (current value of counter c) とする. そして, R_{2e} を $LIST$ から除き, $s + 1$ を waiting phase とする.

Case 1.1.1.2 Otherwise.

$l(s+1) = l(s)$ とおき, それ以外は何もしない.

Case 1.1.2 Otherwise.

$l(s+1) = l(s)$ とおき, それ以外は何もしない.

Case 1.2 $t(N) = 2e + 1$ である場合.

Case 1.2.1 $p_e(l_N) \leq |x| < s + 1$ なる x で次の条件のいずれかを満たすものが存在する場合.

$$(1) B_{s+1}(x) = 1 \ \& \ \Phi_e(C_{s+1}, x) = 0$$

$$(2) B_{s+1}(x) = 0 \ \& \ \Phi_e(C_{s+1}, x) = 1$$

そのような最小の x を取る. (1) を満たすならば,

$$V_{2e+1, s+1} = V_{2e+1, s} \cup \{ \langle x, n \rangle \}$$

(2) を満たすならば,

$$\widehat{V}_{2e+1, s+1} = \widehat{V}_{2e+1, s} \cup \{ \langle x, n \rangle \}$$

とする. ここで, $\sigma_n = C_{s+1} \upharpoonright p_e^x$.

Case 1.1.1.1 次のいずれかを満たす場合.

$$(i) h(\theta(2e+1), s+1) = 1 \text{ and}$$

$$(\exists \langle x, n \rangle \in V_{2e+1, s+1}) [B_{s+1}(x) = 1 \ \& \ \sigma_n = C_{s+1} \upharpoonright p_e^x]$$

$$(ii) \hat{h}(\hat{\theta}(2e+1), s+1) = 1 \text{ and}$$

$$(\exists \langle x, n \rangle \in \widehat{V}_{2e+1, s+1}) [B_{s+1}(x) = 0 \ \& \ \sigma_n = C_{s+1} \upharpoonright p_e^x]$$

このとき, R_{2e+1} は certify されたと言い, $N := N + 1$, $l_N =$ (current value of counter c) とする. そして, R_{2e+1} を *LIST* から除き, $s + 1$ を waiting phase とする.

Case 1.1.1.2 Otherwise.

$l(s+1) = l(s)$ とおき, それ以外は何もしない.

Case 1.1.2 Otherwise.

$l(s+1) = l(s)$ とおき, それ以外は何もしない.

Case 2 s が waiting phase である場合.

Case 2.1 $s = l_N$ の場合.

$l(s) = l_N$ とおき, $s + 1$ を checking phase とする.

Case 2.2 Otherwise.

$l(s + 1) = l(s)$ とおき, それ以外は何もしない.

Case 3 s が checking phase である場合.

Case 3.1 次の条件を満たす requirement R_r ($r \leq r(s)$) が存在する場合.

(1) $h(\theta(r), s) = 0$ and

$$(\forall \langle x, n \rangle \in V_{r,s}) [B_s(x) = 0 \vee \sigma_n \neq C_s \upharpoonright p_e^x]$$

(2) $\hat{h}(\hat{\theta}(r), s) = 0$ and

$$(\forall \langle x, n \rangle \in \widehat{V}_{r,s}) [B_s(x) = 1 \vee \sigma_n \neq C_s \upharpoonright p_e^x]$$

このとき, R_r は injure されたと言い, そのような最小の r を取り,

R_r を $LIST$ に入れる. $s + 1$ を testing phase とする.

Case 3.2 Otherwise.

$r(s+1)$ を $R_{r(s)}$ の次の requirement の suffix とし, $s+1$ を testing phase とする.

End of Construction.

Verification:

Claim 1 Construction で, testing phase から waiting phase に必ず移る.

Proof Case 1.1 の場合を考える. Case 1.2 の場合も同様. $B \not\leq_T^{hp} C$ であるから, $p_e(l_N) \leq |x|$, $B(x) \neq \Phi_e(C, x)$ なる x が存在するので, そのような最小の x を取る. 例えば, $B(x) = 1$, $\Phi_e(C, x) = 0$ とすると, 十分先の s では, $B_s(x) = B(x)$, $C_s \upharpoonright p_e^x = C \upharpoonright p_e^x$ であるから, Case 1.1.1 (1) が満たされ, $\langle x, n \rangle \in V_{2e} = W_{\theta(2e)}$, $x \in B$, $\sigma_n = C \upharpoonright p_e^x$. 従って, $\theta(2e) \in H$. 若し, い

つまでも Case 1.1.1.1 の条件が充たされないとすると, $h(\theta(2e)) = 0$, 即ち, $\theta(2e) \notin H$ となり, 矛盾する. \square

Claim 2 各 requirement は, 高々有限回しか attack されない.

Proof R_r を, 無限回 attack されるような requirement の中で highest priority を持つものとする, ある stage から先では R_r より higher priority を持つ requirement は attack されない. また, さらに十分先の stage s では, $H(\theta(r)) = h(\theta(r), s)$, $\widehat{H}(\hat{\theta}(r)) = \hat{h}(\hat{\theta}(r), s)$ である. Case 3.1 より, それより先の stage s' で R_r は injure されて, $h(\theta(r), s') = \hat{h}(\hat{\theta}(r), s') = 0$. ところが, 次の stage $s' + 1$ で R_r は attack されるから, Claim 1 より, ある $t > s' + 1$ で $h(\theta(r), t) = 1$ または $\hat{h}(\hat{\theta}(r), t) = 1$ となるが, これは矛盾である. \square

Claim 3 各 requirement は充たされる.

Proof R_{2e} が充たされることを示す. R_{2e+1} の場合も同様.

若し, $H(\theta(2e)) = \widehat{H}(\hat{\theta}(2e)) = 0$ とすると,

$$\forall \langle x, n \rangle \in V_{2e} [B(x) = 0 \vee \sigma_n \neq C \upharpoonright p_e^x], \text{ 且つ}$$

$$\forall \langle x, n \rangle \in \widehat{V}_{2e} [B(x) = 1 \vee \sigma_n \neq C \upharpoonright p_e^x].$$

また, さらに十分先の stage s では, $H(\theta(2e)) = h(\theta(2e), s)$, $\widehat{H}(\hat{\theta}(2e)) = \hat{h}(\hat{\theta}(2e), s)$ である. Claim 2 から R_{2e} は有限回しか attack されないから, 十分先の s では $V_{2e,s}$, $\widehat{V}_{2e,s}$ は fix する. 従って, それらよりさらに十分先の t では,

$$\forall \langle x, n \rangle \in V_{2e,t} \cup \widehat{V}_{2e,t} [B_t(x) = B(x) \ \& \ C_t \upharpoonright p_e^x = C \upharpoonright p_e^x]$$

となり, 上式より, Case 3.1 の条件が充たされ, R_{2e} は injure されることになり, 矛盾する.

つまり, $H(\theta(2e)) = 1$ あるいは $\widehat{H}(\hat{\theta}(2e)) = 1$ である. 例えば, $H(\theta(2e)) = 1$ とする. $B(x) = 1 \ \& \ \sigma_n = C \upharpoonright p_e^x$ なる $\langle x, n \rangle \in V_{2e}$ を取れば, ある stage

$s+1$ で, $\langle x, n \rangle \in V_{2e, s+1} - V_{2e, s}$. 従って, $B_{s+1}(x) = 1$, $\Phi_e(C_{s+1}, x) = 0$, $\sigma_n = C_{s+1} \upharpoonright p_e^x$. ところが $C \upharpoonright p_e^x = C_{s+1} \upharpoonright p_e^x = \sigma_n$ であるから, $\Phi_e(C, x) = 0$ となり, 確かに $A_0(x) = B(x) \neq \Phi_e(C, x)$. \square

以上の A_0, A_1 の構成から, $c < a_0, a_1 < b$. 最後に, $b \leq \deg_T^{hp}(A_0 \oplus A_1) = (a_0 \vee a_1) \leq b$ なることは, input x に対して, $l_N \leq |x| < l_N + 1$ なる N , $t(N)$ を計算して, $t(N) = 2e$ なら $y = 0x$, $t(N) = 2e + 1$ なら $y = 1x$ とすれば, $B(x) = A_0 \oplus A_1(y)$ より左不等式が, また, $C \leq_T^{hp} B$ より右不等式が得られる. $a_0 \mid a_1$ は明らか. $\square\square$

3 Problems

PTIME degrees の structures を調べる目的の 1 つは, 先に挙げた decidability に関する結果に続く open problems, 例えば,

- $\text{Th}(\langle S, \leq_T^{hp} \rangle); S = I, LOW, R, \text{ or } \Delta_2^0$ は undecidable か?
- $\Pi_3\text{-Th}(\langle S, \leq_T^{hp} \rangle)$ は undecidable か?

等を 既知の undecidability に帰着させて考えるためである.

つまり, (finite) partial orderings の theory の undecidability から, language $L(\leq)$ の formula φ で

$\forall \langle P, \leq_P \rangle \text{ p.o. } \exists \bar{a} \text{ (finite parameters) s.t.}$

$$\langle \{b \in S : \langle S, \leq_r \rangle \models \varphi_{\bar{x}, y}(\bar{a}, b)\}, \leq_r \rangle \simeq \langle P, \leq_P \rangle$$

なるものを見つけることである.

References

- [1] K. Ambos-Spies and A. Nies, *The Theory of the Polynomial Many-One Degrees of Recursive Sets is Undecidable*, Proc. STACS'92, LNCS 577, 1992

- [2] K. Ambos-Spies and D. Yang, *Honest polynomial time reducibilities* (announce)
- [3] K. Aoki, J. Shinoda, and T. Tsuda, *Strong minimal pair theorem for the honest polynomial degrees of Δ_2^0 low sets*, J.Math.Soc.Japan, vol.44, no.3, 1992
- [4] K. Aoki, J. Shinoda, and T. Tsuda, *On Π_2 theories of hp - T degrees of low sets*, Preprint Series, Nagoya Univ., No. 1, 1992 (to appear)
- [5] R. Downey, W. Gasarch, and M. Moses, *The Structure of the Honest Polynomial m -degrees* (to appear)
- [6] J. Shinoda and T. Slaman, *On the Theory of the PTIME Degrees of the Recursive Sets*, J. Comp.Sys.Sci., vol. 41, No. 3, 1990
- [7] R. Shore and T. Slaman, *The p - T -degrees of the recursive sets: lattice embeddings, extensions of embeddings and two-quantifier theory*, Theor.Comp.Sci. 97, 1992